第八屆高一排名賽

題解

關於這次比賽

1.

二階

First AC: 高雄中學 林煜傑

AC:

出題者: 曹宸睿

題敘靈感來源: 李長諺(BrianLee)

子題1: 各部分分數均為整數，且學測滿分

以整數讀入，並進行計算即可

子題2: 學測必為滿分

幫助debug用的，WA的時候可以先將這部分分數設定為滿分，傳上去看有沒有過這小題，就能縮小範圍。

子題3: 無特殊限制

以給定公式進行計算，注意float會使誤差過大，需使用double進行運算。

2.

國手

First AC: 高雄中學 林煜傑

AC:12人

出題者: 建國中學 賴昭勳

題敘靈感來源: 賴昭勳(8e7)

子題1: N≤100

debug用。

由於分數最多只到10^6，在N<=100情況下不可能爆int。忘記開long long會拿到這筆。

子題2: N ≤ 5000，裝弱時必定0分

裝弱時必定0分->從正常分數最低的開始裝，裝到不能裝為止。每次在正常分數中找到最低的，扣除它以後，判斷是否仍高於目標分數。

時間複雜度：O(N^2)

子題3: N ≤ 5000

根據上一子題，有兩個對答案的猜想。

1、每次取最小的(X)
2、每次取相差最小的(O)

時間複雜度：O(N^2)

子題4: 裝弱時必定0分

與子題2相同邏輯，但使用sort一次找到最低分數、第二低分數……。

第二功能：幫助debug，WA時直接以原始陣列sort，以確定自己哪裡寫錯。

時間複雜度：O(NlogN)

子題5: 無特殊限制

與子題3相同邏輯, 但使用sort一次找到相差最低、第二低……。

時間複雜度：O(NlogN)

3.

鐵人三項

First AC: 臺南一中 羅文謙

AC: 7人

出題者: 曹宸睿

題敘靈感來源: 歐育淇(ub33)

子題1: N≤300, ai≤10^5

1、不會爆int，debug用。

2、枚舉第一次、第二次轉換運動方式的時間點，再遍歷一次陣列計算總和，時間複雜度O(N^3)。

子題2: N≤5000

枚舉第一次、第二次轉換運動方式的時間點,

~~再遍歷一次陣列計算總和。~~**這太慢了!**

使用可區間查詢總和之方法, 如前綴和、~~線段樹~~, 於枚舉完畢後以O(1) / ~~O(logN)~~時間計算區間和, 複雜度O(N^2) / ~~O(N^2 logN)~~。

靜態區間和就是要用線段樹啊!

同意這句話的請舉手。

靜態區間和就是要用線段樹啊!

同意這句話的請舉手。

現在從窗戶出去，馬上

子題3: 每個路段中，跑步所需時間皆為10^9

枚舉第一次~~、第二次~~轉換運動方式的時間點，使用可區間查詢總和之方法，如前綴和、，於枚舉完畢後以 O(1) 時間計算區間和。

不需要枚舉第二次，跑步必然只會於最後一個路段使用。因此僅需枚舉第一次轉換方式的點。時間複雜度 O(N)。

子題4: 無特殊限制

恩?好像沒辦法用前三子題的方法了。

考慮dp[i][j]為完成前i路段，並正使用第j種運動方式的最小花費，則dp[i][j] = min(dp[i-1][j],dp[i-1][j-1]) + c[i][j]

所求即為dp[N][3]。

時間複雜度 O(N)

4.

舒服

First AC: ？

AC: ？

出題者: 吳彥德(SA)

題敘靈感來源: 林哲宇(joylintp)

子題1: 範測

特判範測!!!

debug用，確定自己有記得加換行。

子題2、3: A的長度≤10

因A的長度必為10倍數，因此A=10。

直接將A以整數儲存，並轉換為目標進位制。

有無空白的差別在於是否知道getline函數的使用。

子題4: A的長度≤1000 , K = 1

K = 1 代表只需轉換為二進位, 照著題目敘述,
將A每10位切成一段後, 轉成二進位即可。

轉換為長度為32的二進位數字的方法:

重複32次: 如該數為奇數, 在字串尾部加上1,
否則加上0, 接著將該數除以2。

最後將字串頭尾翻轉即可。

子題5: A的長度≤1000，K = 1,3,7

轉換為二進位後，觀察到若將二進位數字每2個為一位，即可轉換為4進位數字，每3個為一位，即可轉換為8進位數字。

子題6: A的長度≤1000

轉換為二進位後，觀察到若將二進位數字每~~2~~K個為一位，即可轉換為2^K進位數字。

子題7: 無特殊限制

轉換為二進位後, 觀察到若將二進位數字每~~2~~ K個為一位, 即可轉換為2^K進位數字。

前面處理太慢(字串從前面加等...)的這邊可能會TLE

First AC: ？

AC: ？

5.

火力全開

出題者: 曹宸睿

題敘靈感來源: 侯欣緯(Wiwiho)
以及
TOI火力全開的二模Judge

子題1: M=N-1

只有一種可能的興建方案，直接進行DFS/BFS即可。

子題2: N ≤ 3000 , M ≤ 6000

稍有經驗的參賽者可能會試圖對答案二分搜，畢竟這很明顯的具有單調性，若不可能使最大不滿值在K以下，則答案就不可能為0~K。

但這題似乎有點不一樣(?

最短距離必定是從其他點的最短距離加上該條邊之權重所得到的

取其他邊使一點離原點距離增加，
不可能使其他點離原點距離降低！

找到每個點離1號點最短距離最長的便是答案

子題2: N ≤ 3000 , M ≤ 6000

單源最短路徑問題。

使用SPFA or Bellman-Ford，時間複雜度 O(NM)

子題3: $c_i = 1$

單源最短路徑問題。

使用BFS，時間複雜度 $O(N+M)$

子題4: 無特殊限制

單源最短路徑問題。

使用Dijkstra，時間複雜度 O((N+M)logN)

6.

氣球

First AC：？

AC：？

出題者: 曹宸睿

題敘靈感來源: 王政祺(casperwang)

子題1: N ≤ 20

其實我不知道2^N之類的可以怎麼做。有人想到做法嗎。

子題2: N ≤ 100

進行類似背包DP，以dp[i]表示使用i元的最大價值，列舉每個氣球要使用的比例，如為完整使用，由dp[i-ci]轉移，否則由dp[i-k-j]轉移，j = 1~ci-1。

複雜度O(N^2M)

子題3: K = 0

氣球可免費任意切割，因此只需不停取當前壓力指數/價格最大者，如全取會超過價格限制則壓縮它。

可以發現，**最多只會有一個氣球被壓縮**。

複雜度O(N logN) (sort)

子題4: K = 10^9

氣球不可切割，為經典的01背包問題。

相信寫到這裡的，01背包是基礎知識(?

複雜度O(NM)

子題5: 無特殊限制

好難，試試唬爛好了。作一次第三子題的方法，作一次第四子題的方法，然後取大的，結果過了耶！我超會唬爛。

你會證明嗎?

如可以壓縮氣球，最佳解必定能在壓縮一次內得到，且壓縮之氣球為(壓力指數/價格)值最低者。

如選擇不壓縮氣球，則如子題4一樣，是個標準的背包問題。

如選擇壓縮一顆，將原始持有的錢減掉K後，如子題3一樣greedy取。

兩者較大者即為答案。

複雜度：$O(N\log N + NM)$

子題5: 無特殊限制

另解：有限背包，將物品分拆為重量1的小物品，將其組成重量1,2,4,8…..物品後進行01背包，或使用如下之單調隊列優化。

dp[i] = max(dp[j-k] + (i-j)*(p/c)) , i-j < c

dp[i] = i * (p/c) - max(dp[j-k] + j*(p/c))

複雜度O(NMlogN) / O(NM) (單調隊列優化)

7.

AIQQQ賺多少

First AC: ？

AC: ？

出題者: 曹宸睿

題敘靈感來源: 周暘典(Lipro)
2017全國賽

題目解釋

給定一商品每日價格及一次買賣所需手續費，限定最多只能同時持有一物品的情況下，最大獲利以及所需交易次數。

讀懂題目很重要啊！TOI/全國賽最愛這個了

子題1: N ≤ 20

2^N枚舉該天是否要進行交易。如交易天數非偶數，直接略過。

複雜度：O(N*2^N)

子題2、3：N ≤ 2000, C=0

於題敘裡即有說明與解答。

以dp[i]表示前i時間點中可獲得的最大價值，

枚舉上一個買入時間點k，

$$dp[i] = \max\left(\max_{0 \le k < x-1} \left(p[i] - p[k+1] + dp[k] - C \right),\ dp[i-1] \right)$$

轉移次數的部分，只需以pair形式儲存，將轉移次數紀錄在second並將其*-1，即可達到先比利潤，後比轉移次數之效果。

複雜度：O(N^2)

子題4: C = 0

將價格趨勢畫作折線圖，可以發現，只要在低谷買進，頂峰賣出，便可得到最大利潤。

低谷：該天價格低於前後兩天

頂峰：該天價格高於前後兩天

依照實作方法不同，可能須預先合併連續相同價格的日期。複雜度：O(N)

子題5：無特殊限制

$$dp[i] = \max\left(\max_{0 \le k < x-1} \left(p[i] - p[k+1] + dp[k] - C \right), \ dp[i-1] \right)$$

盯著這個式子，發現k永遠不會過期，且與k有關之項只有dp[k] - p[k+1]。透過儲存前綴最大的dp[k] - p[k+1]，可O(1)轉移，當然，你要寫BIT或線段樹，這題也沒有卡，不要寫得太糟應該都會過。

複雜度：O(N)

First AC: ?

AC: ?

8.

蛋餅買蛋餅

出題者: 林哲宇

題敘靈感來源: 林秉軒(2qbingxuan)

子題1: N ≤ 3

隨便你問，應該有很多種奇怪方法。

子題2: N ≤ 10

不知道蛋餅是重是輕，但如重量不等的蛋餅被放上天平，一定不平衡。

因此，用N次詢問 {{1},{2}} , {{2},{3}} ...... {{N-1},{N}},{{N},{1}}，若兩邊重量不等，則在兩個編號做標記，若一編號被標記兩次，該編號即為重量不等之編號。

這樣應該會拿到一二子題，加後面三四子題1/5的分數17分，共32分。

子題3: 一份蛋餅的重量為 90 克

使用二分法，每次將剩餘可能編號分成兩堆，秤重後往輕的那端遞迴，詢問log200 = 8次。(此處log以2為底)

使用三分法，每次將剩餘可能編號分成三堆，秤重後往輕的那端遞迴，如相等則往第三堆遞迴，詢問log200 / log3 = 5次。

子題3: 無特殊限制

高分且好寫解:

不知道蛋餅是重是輕，但如重量不等的蛋餅被放上天平，一定不平衡。

每次將剩餘蛋餅分作四堆，詢問1、2堆與2、3堆重量比較，則依照結果可分為四種。

1. 1,2、2,3堆皆不等 -> 在第2堆
2. 1,2、2,3堆皆相等 -> 在第4堆
3. 1,2不等，2,3相等 -> 在第1堆
4. 1,2相等，2,3不等 -> 在第3堆

子題3: 無特殊限制

最後當範圍縮小到4以下時，兩個兩個暴力詢問。

如發現全相等，代表所有蛋餅重量相同，反之，應可得知重量不同者位置。

詢問次數：logn/log4 = 8，可能因實作方法不同多了1、2次，但一定在10次內。可得83分以上。

子題3: 無特殊限制

正解：若我們知道該蛋餅的重量，即可用五次詢問得知答案。

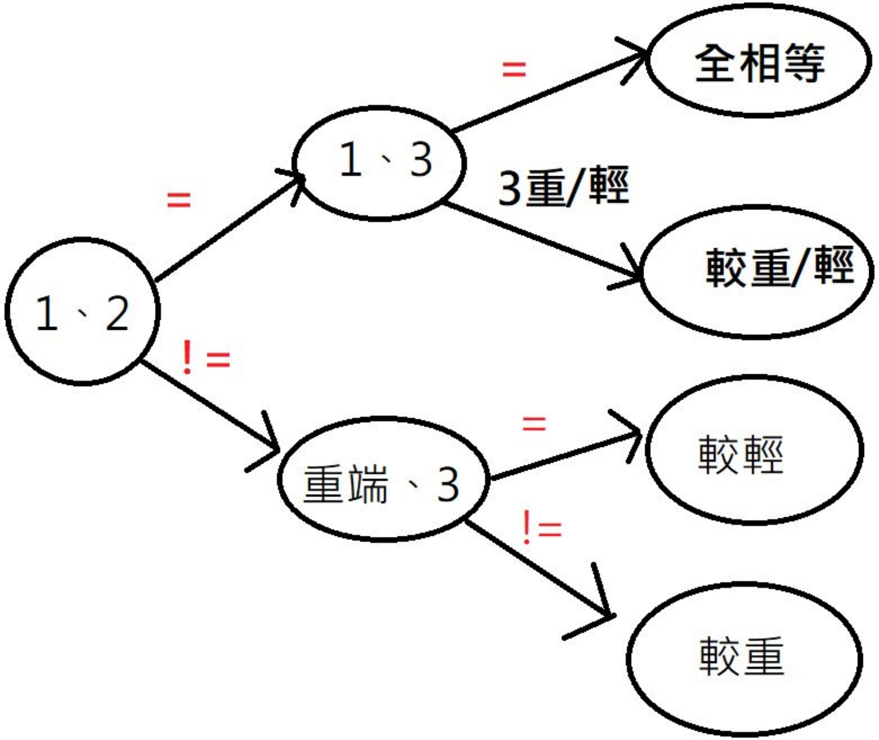
要如何用一次詢問，知道重量是90、100或110?

有點難。我也不會

那有辦法用兩次詢問嗎?

子題3: 無特殊限制

好像可以。

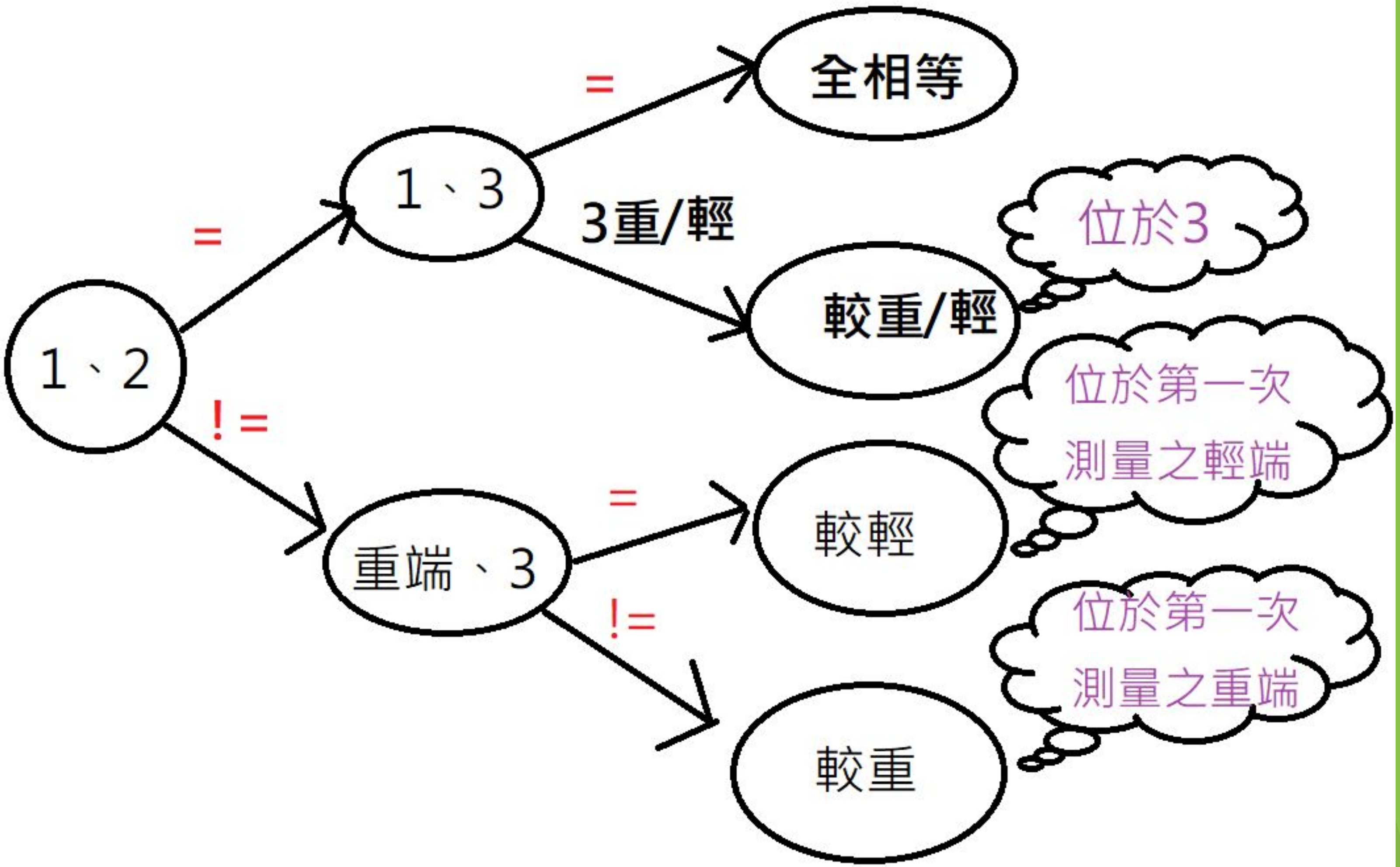


子題3: 無特殊限制

用兩次知道輕重，五次詢問，共七次。

還差一次怎麼辦？

剛剛那張圖，好像資訊不只這些？


1、2
=
!=
1、3
重端、3
=
3重/輕
全相等
較重/輕
位於3
=
!=
較輕
較重
位於第一次測量之輕端
位於第一次測量之重端

子題3: 無特殊限制

運用兩次詢問，將範圍降到1/3，並得知該份不同重量蛋餅之重。

接下來用4次詢問，便能得到答案。

實作細節很多，請自行品味XD

開獎時間~~